

QUELQUES CONSÉQUENCES DES TRAVAUX D'ARTHUR POUR LE SPECTRE ET LA TOPOLOGIE DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES

NICOLAS BERGERON ET LAURENT CLOZEL

RÉSUMÉ. En nous basant sur les résultats d'Arthur annoncés dans [7, §30] nous démontrons les conjectures énoncées dans [10, 13, 12] dans le cas des groupes orthogonaux à l'exclusion des groupes de type 6D_4 . En ce qui concerne ces derniers, nous annonçons la démonstration – encore en préparation – que leur réseaux de congruences ont toujours un H^1 trivial. Les démonstrations d'Arthur devraient paraître prochainement.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Groupes orthogonaux	6
3. Spectre automorphe des formes quasi-déployées	8
4. Stabilisation de la formule des traces	9
5. Déstabilisation de la formule des traces	10
6. Caractères infinitésimaux des représentations automorphes de G	13
Références	16

1. INTRODUCTION

Soit G le \mathbf{Q} -groupe semi-simple obtenu – par restriction des scalaires – à partir d'un groupe spécial orthogonal sur un corps de nombres totalement réel. On considère pour l'instant un groupe G qui ne provient pas d'une forme tordue ${}^{3,6}D_4$ – on dit alors que G est *non trialitaire*. On suppose enfin $G(\mathbf{R})$ égal au produit de $\mathrm{SO}(n, 1)$ par un groupe compact. L'espace symétrique associé au groupe G est alors l'espace hyperbolique réel \mathbf{H}^n que l'on munit de sa métrique de courbure sectionnelle constante égale à -1 . Étant donné un sous-groupe de congruence (sans torsion) $\Gamma \subset G$ on peut former le quotient $\Gamma \backslash \mathbf{H}^n$. Ce quotient est une variété hyperbolique réelle de volume fini ; appelons *variétés hyperboliques de congruence* les variétés ainsi obtenues. Le cas échéant nous parlons de variétés hyperboliques de congruence *non trialitaires* afin de rappeler que le groupe G est supposé non trialitaire.

Burger, Li et Sarnak [16] ont proposé la conjecture suivante – dite *de pureté* ou *de quantification* – décrivant le spectre du laplacien sur les variétés hyperboliques de congruence.

1.1. Conjecture. *Soit M une variété hyperbolique de congruence de dimension n . Le spectre L^2 du laplacien (sur les fonctions) de M est contenu dans l'ensemble*

$$\bigcup_{0 \leq j < \frac{n-1}{2}} \left\{ \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 - \left(\frac{n-1}{2} - j \right)^2 \right\} \cup \left[\left(\frac{n-1}{2} \right)^2, +\infty \right[.$$

Un cas particulier – le cas du groupe $\mathrm{SO}(3)$ déployé $/\mathbf{Q}$ – de cette conjecture est la célèbre conjecture de Selberg. Dans [13, §6.2 & 6.3] nous avons ramené cette conjecture aux conjectures d'Arthur telles que formulées dans [5] et proposé des extensions au spectre du laplacien sur les formes différentielles. Depuis, le programme d'Arthur a fait de spectaculaires progrès, d'une part grâce à Arthur lui-même – voir [7, §30] – et d'autre part grâce à la démonstration du lemme fondamental – par Ngô [25] – puis de ses différents avatars (tordus et pondérés) par Ngô, Waldspurger, Laumon et Chaudouard. À la suite de quoi les résultats contenus dans [7, §30] peuvent maintenant être rendus inconditionnels. C'est la raison d'être de cet article. Nous commençons par déduire de ces bouleversements récents le théorème 6.4 qui implique en particulier l'approximation suivante de la conjecture 1.1 :

1.2. Théorème. *Soit M une variété hyperbolique de congruence non trialitaire de dimension n . Le spectre L^2 du laplacien (sur les fonctions) de M est contenu dans l'ensemble*

$$\bigcup_{0 \leq j < \frac{n-1}{2}} \left\{ \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 - \left(\frac{n-1}{2} - j \right)^2 \right\} \cup \left[\left(\frac{n-1}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)^2 + 1} \right)^2, +\infty \right[.$$

Un aspect remarquable de ce résultat est que, bien que l'on ne connaisse qu'une approximation de la « conjecture de Ramanujan » donnant la décomposition spectrale des formes automorphes pour $\mathrm{GL}(n)$, le spectre – au moins dans l'intervalle $[0, (\frac{n-2}{2})^2]$ – est exactement celui prédit par Burger et Sarnak.

Notons – cela découle de [16] – que les valeurs propres « pures » apparaissent bien dans le spectre de certaines variétés hyperboliques de congruence.

Le théorème 6.4 implique plus généralement un résultat de pureté pour le spectre sur les formes différentielles. Dans cette introduction nous ne retenons que le corollaire suivant, conjecture A^- de [13].

1.3. Théorème. *Pour $0 \leq k \leq n/2 - 1$, il existe une constante strictement positive $\varepsilon(n, k)$ telle que pour toute variété hyperbolique de congruence non trialitaire M la première valeur propre non nulle $\lambda_1^k = \lambda_1^k(M)$ du laplacien sur les k -formes différentielles L^2 vérifie :*

$$\lambda_1^k \geq \varepsilon(n, k).$$

Remarque. Dans un article récent [30] B. Speh et T. N. Venkataramana ont démontré le résultat d'isolation de la valeur propre nulle (théorème 1.3) s'il est vrai en degré médian (pour n pair) pour tout n . Comme on le voit, ce dernier résultat est vrai mais la démonstration donne directement un résultat (bien meilleur) pour les autres degrés.

Ce théorème a un certain nombre de conséquences sur la topologie des variétés hyperboliques de congruence; conséquences que nous avons rassemblées sous le nom de *propriétés de Lefschetz automorphes* dans [10, 13, 12]. Nous supposons – pour simplifier – que les variétés hyperboliques $\Gamma \backslash \mathbf{H}^n$ sont compactes et renvoyons

aux articles cités ci-dessus pour les énoncés dans le cas général. Dorénavant nous supposerons donc G anisotrope.

1.4. Propriétés de Lefschetz automorphes. Celles-ci prédisent un lien entre la (co-)homologie des variétés hyperboliques $\Gamma \backslash \mathbf{H}^n$ et les « sections hyperplanes » données par leur sous-variétés compactes totalement géodésiques. Une telle sous-variété est associée à un sous-groupe $H \subset G$ sur \mathbf{Q} stable par l'involution de Cartan de G . Le groupe $H(\mathbf{R})$ est alors localement isomorphe au produit du groupe $\mathrm{SO}(k, 1)$ (avec $k \leq n$) par un groupe compact. Au niveau des espaces symétriques, on obtient un plongement totalement géodésique $\mathbf{H}^k \hookrightarrow \mathbf{H}^n$ et si $\Gamma \subset G$ est un sous-groupe de congruence l'inclusion ci-dessus passe au quotient en une immersion totalement géodésique

$$j = j(\Gamma) : (\Gamma \cap H) \backslash \mathbf{H}^k \rightarrow \Gamma \backslash \mathbf{H}^n.$$

Cette immersion induit une application naturelle entre groupes d'homologie :

$$(1.4.1) \quad j_\bullet : H_\bullet((\Gamma \cap H) \backslash \mathbf{H}^k) \rightarrow H_\bullet(\Gamma \backslash \mathbf{H}^n).$$

Si maintenant $g \in G(\mathbf{Q})$, on peut considérer l'immersion

$$j_g = j_g(\Gamma) : (H \cap g^{-1}\Gamma g) \backslash \mathbf{H}^k \rightarrow \Gamma \backslash \mathbf{H}^n.$$

On définit alors l'*application de restriction virtuelle*

$$(1.4.2) \quad H^\bullet(\Gamma \backslash \mathbf{H}^n) \rightarrow \prod_{g \in G(\mathbf{Q})} H^\bullet((H \cap g^{-1}\Gamma g) \backslash \mathbf{H}^k)$$

induite par les applications de restriction duales aux immersions (j_g) . En passant à la limite sur le système inductif des sous-groupes de congruence $\Gamma \subset G$, on obtient finalement les application naturelles :

$$(1.4.3) \quad H_\bullet(\mathrm{Sh}^0 H) \rightarrow H_\bullet(\mathrm{Sh}^0 G) \quad \text{et} \quad H^\bullet(\mathrm{Sh}^0 G) \rightarrow \prod_{g \in G(\mathbf{Q})} H^\bullet(\mathrm{Sh}^0 H),$$

où

$$H_\bullet(\mathrm{Sh}^0 G) = \varinjlim_{\Gamma \text{ cong}} H_\bullet(\Gamma \backslash \mathbf{H}^n), \quad H^\bullet(\mathrm{Sh}^0 G) = \varprojlim_{\Gamma \text{ cong}} H^\bullet(\Gamma \backslash \mathbf{H}^n)$$

et de même pour H .

En ces termes, les deux théorèmes suivants découlent de [10, Theorem 2.4] et du théorème 1.3, pour le premier, et de la démonstration de [12, Théorème 8.7] (voir aussi la Conjecture 1.13), pour le second.

1.5. Théorème. *Soient $H \subset G$ deux groupes semi-simples sur \mathbf{Q} . Supposons $G(\mathbf{R}) \cong \mathrm{SO}(n, 1) \times (\text{compact})$, $H(\mathbf{R}) \cong \mathrm{SO}(k, 1) \times (\text{compact})$, H invariant par une involution de Cartan de G et tous deux non trialitaires. Alors,*

- (1) *pour tout entier $i \geq n/2$, l'application naturelle*

$$H_i(\mathrm{Sh}^0 H) \rightarrow H_i(\mathrm{Sh}^0 G)$$

est injective,

- (2) *pour tout entier $i \leq k/2$, l'application naturelle*

$$H^i(\mathrm{Sh}^0 G) \rightarrow \prod_{g \in G(\mathbf{Q})} H^i(\mathrm{Sh}^0 H)$$

est injective.

Noter qu'un résultat proche du théorème 1.5 est démontré dans [14].

1.6. Théorème. *Soit G un groupe semi-simple sur \mathbf{Q} . Supposons $G(\mathbf{R}) \cong \mathrm{SO}(n, 1) \times$ (compact) et G non trialitaire. Soient α et β deux classes de cohomologie de degrés respectifs k et l dans $H^\bullet(\mathrm{Sh}^0 G)$ avec $k + l \leq n/2$. Il existe alors un élément $g \in G(\mathbf{Q})$ tel que*

$$g(\alpha) \wedge \beta \neq 0$$

dans $H^{k+l}(\mathrm{Sh}^0 G)$.

Comme dans [10] on peut également considérer le cas où G est un groupe unitaire tel que $G(\mathbf{R})$ soit isomorphe au produit de $\mathrm{SU}(n, 1)$ par un groupe compact. L'espace symétrique associé est l'espace hyperbolique complexe $\mathbf{H}_{\mathbf{C}}^n$. On note $H^{\bullet, 0}(\mathrm{Sh}^0 G)$ les groupes de cohomologie *holomorphe* obtenus en passant à la limite sur les sous-groupes de congruence. Le théorème suivant découle également du théorème 1.3, voir [12]. Remarquons que l'inclusion $\mathrm{SO}(n, 1) \subset \mathrm{SU}(n, 1)$ correspond au plongement totalement géodésique – et totalement réel – $\mathbf{H}^n \subset \mathbf{H}_{\mathbf{C}}^n$.

1.7. Théorème. *Soient $H \subset G$ deux groupes semi-simples sur \mathbf{Q} . Supposons $H(\mathbf{R}) \cong \mathrm{SO}(n, 1) \times$ (compacte), $G(\mathbf{R}) \cong \mathrm{SU}(n, 1) \times$ (compacte) et H invariant par une involution de Cartan de G . Alors, pour tout entier $i \leq n/2$, l'application naturelle*

$$H^{i, 0}(\mathrm{Sh}^0 G) \rightarrow \prod_{g \in G(\mathbf{Q})} H^i(\mathrm{Sh}^0 H)$$

est injective.

Comme l'ont fait remarquer Raghunathan et Venkataramana dans [27] si H est un groupe obtenu – par restriction des scalaires – à partir d'un groupe spécial orthogonal sur un corps de nombres totalement réel qui n'est pas une forme exceptionnelle de $\mathrm{SO}(8)$ ou de $\mathrm{SO}(4)$, alors il existe un groupe unitaire G sur \mathbf{Q} , obtenu par restriction des scalaires à partir d'un « vrai » groupe unitaire – c'est-à-dire associé à une algèbre de matrices – et tel que $H \subset G$ soit invariant par une involution de Cartan de G . De plus si $H(\mathbf{R}) \cong \mathrm{SO}(n, 1) \times$ (compacte) on peut supposer $G(\mathbf{R}) \cong \mathrm{SU}(n, 1) \times$ (compacte). Or Anderson montre dans [2] que pour un tel groupe unitaire G et pour tout entier $i \leq n$, $H^{i, 0}(\mathrm{Sh}^0 G) \neq \{0\}$. Il découle donc du théorème 1.7 le corollaire – semble-t-il nouveau, voir [22] pour des résultats partiels – suivant.

1.8. Corollaire. *Soit Γ un réseau arithmétique dans le groupe de Lie réel $\mathrm{SO}(n, 1)$, $n \geq 2$. Si $n = 7$ nous supposons de plus que Γ ne provient pas d'une forme tordue 6D_4 . Si $n = 3$ et Γ est commensurable au groupe des unités d'une algèbre de quaternions sur un corps de nombres L avec un unique plongement complexe, nous supposons de plus que L contient un sous-corps d'indice 2.*

Alors, il existe un sous-groupe d'indice fini $\Gamma' \subset \Gamma$ – que l'on peut choisir de congruence – tel que pour tout $i \leq n$, $b_i(\Gamma')$ – le i -ème nombre de Betti de la variété $\Gamma' \backslash \mathbf{H}^n$ – est non nul.

Une conjecture célèbre (attribuée à Thurston dans [15]) affirme – au moins pour le premier nombre de Betti – qu'un résultat similaire devrait être vrai pour tout réseau dans $\mathrm{SO}(n, 1)$. Dans [9] l'analogue du corollaire 1.8 est vérifié pour les réseaux non-arithmétiques construits par Gromov et Piatetski-Shapiro [20]. Le cas général est encore ouvert. C'est également le cas pour la plupart des réseaux arithmétiques

exclus dans le corollaire 1.8, à l'exception notable de ceux couverts par les résultats de Clozel [18] et Rajan [28].

1.9. Groupes trialitaires. Le cas des réseaux arithmétiques exceptionnels dans $\mathrm{SO}(7, 1)$ provenant d'une forme tordue ${}^{3,6}D_4$ est particulièrement intéressant. Commençons par remarquer que ces réseaux proviennent en fait nécessairement d'une forme tordue 6D_4 . De tels réseaux existent bel et bien – cela résulte par exemple de [26] – et sont tous cocompacts.

Dans cet article on exclut le cas de ces formes exceptionnelles ; les groupes considérés sont alors des formes intérieures de groupes quasi-déployés auxquels la théorie d'Arthur s'applique. Nous détaillons le cas des formes tordues 6D_4 dans un travail en préparation. Au prix d'un grand nombre d'efforts techniques le théorème 1.3 devrait s'étendre à ces formes tordues. Nous ne le vérifions pas – les corollaires mentionnés plus haut sont essentiellement vides. Nous montrons par contre le théorème suivant qui contraste avec le corollaire 1.8 et vient confirmer la conjecture 4.6 de [11].

1.10. Théorème. *Soit G un groupe un groupe projectif orthogonal ou de spin du type 6D_4 défini sur un corps de nombres totalement réel. Alors, pour tout sous-groupe de congruence $\Gamma \subset G$,*

$$b_1(\Gamma) = 0.$$

Le problème des sous-groupes de congruence reste ouvert pour ces groupes algébriques ; il n'est donc pas exclu que la conjecture de Thurston soit vérifiée mais, contrairement à tous les autres cas arithmétiques connus, pour la démontrer il sera nécessaire de considérer des sous-groupes qui ne sont pas de congruence.

On l'a dit, le théorème ci-dessus n'est pas vide, il existe de tels G . Concluons par la construction – due à Allison [1, Exemple 11.8] – d'un exemple.

Soit $B = \mathbf{Q}[b_0]$, où le polynôme minimal de b_0 est $x^4 + 3x - \frac{1}{2}$. L'algèbre B est de dimension 4 sur \mathbf{Q} , elle est naturellement munie d'une trace t et d'une involution $\theta : b \mapsto -b + \frac{1}{2}t(b)$. On peut associer à B une algèbre à involution – non associative – de dimension 8 :

$$\mathrm{CD}(B, -3) := B \oplus s_0 B,$$

muni du produit

$$(b_1 + s_0 b_2)(b_3 + s_0 b_4) = b_1 b_3 + \mu(b_2 b_4^\theta)^\theta + s_0(b_1^\theta b_4 + (b_2^\theta b_3^\theta)^\theta)$$

et de l'involution

$$\overline{b_1 + s_0 b_2} = b_1 - s_0 b_2^\theta.$$

Notons

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{P} = \{X \in M_3(\mathrm{CD}(B, -3)) : \gamma^{-1t} \overline{X} \gamma = -X \text{ et } \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

L'algèbre $\mathcal{K} := \mathcal{K}(\mathrm{CD}(B, -3))$ obtenue en formant la somme directe de l'algèbre des dérivations intérieures de $\mathrm{CD}(B, -3)$ et de l'algèbre \mathcal{P} est une algèbre de type D_4 . Sur \mathbf{C} , l'algèbre $\mathrm{CD}(B, -3)$ est isomorphe à l'algèbre de Cayley $\mathcal{C}_{\mathbf{C}}$. Soient n et t respectivement la norme et la trace de $\mathcal{C}_{\mathbf{C}}$ et

$$\langle x, y, z \rangle = \frac{1}{2}t(x(yz)).$$

La forme trilinéaire $\langle \cdot, \cdot, \cdot \rangle$ vérifie

$$\langle x, y, z \rangle = \langle z, x, y \rangle = \langle \overline{y}, \overline{x}, \overline{z} \rangle \quad \text{pour } x, y, z \in \mathbb{C}_{\mathbf{C}}.$$

On peut alors vérifier que l'algèbre $\mathcal{K}_{\mathbf{C}}$ est isomorphe à l'algèbre

$$\mathcal{L} = \{(L_1, L_2, L_3) \in \mathfrak{o}(n)^3 : \langle L_1 x, y, z \rangle + \langle x, L_2 y, z \rangle + \langle x, y, L_3 z \rangle = 0 \text{ pour } x, y, z \in \mathbb{C}_{\mathbf{C}}\}.$$

On peut donc identifier \mathcal{K} à une \mathbf{Q} -forme de \mathcal{L} et la sous-algèbre associative engendrée par \mathcal{K} dans $\text{End}_{\mathbf{C}}(\mathbb{C}_{\mathbf{C}})^3$ – appelé *invariant d'Allen* de \mathcal{K} – est l'algèbre $M_4(D)$ où D est l'algèbre de quaternions $(\frac{\nu-3}{K})$ sur $K = \mathbf{Q}(\nu)$ extension cubique – de groupe de Galois \mathfrak{S}_3 – associée à un élément ν de polynôme minimal $h(x) = x^3 + 2x - 9$.

Le polynôme h possède une racine réelle et deux racines complexes conjuguées de telle manière que $D_{\mathbf{R}} \cong M_2(\mathbf{R}) \oplus M_2(\mathbf{C})$ et $\text{sgn}(\mathcal{K}_{\mathbf{R}}) = -14$. L'algèbre $\mathcal{K}_{\mathbf{R}}$ est donc isomorphe à $\mathfrak{o}(7, 1)$ et les groupes – projectif orthogonal ou de spin – associés à l'algèbre de Lie \mathcal{K} sont des exemples de groupes auxquels le théorème 1.10 s'applique.

2. GROUPES ORTHOGONAUX

On note G un groupe spécial orthogonal sur un corps de nombres totalement réel F . Dans cette section on suppose G non trialitaire, c'est-à-dire que l'on exclut le cas des formes exceptionnelles de $\text{SO}(8)$. Soit \mathbf{A} l'anneau des adèles sur F .

Nous supposons G compact à toutes les places à l'infini de F sauf une – notée v_0 – où le groupe est isomorphe au groupe $\text{SO}(p, q)$. Supposons $p \geq q$ et notons $m = p + q$ le nombre de variables du groupe orthogonal, ℓ la partie entière de $m/2$ et $N = 2\ell$. Le groupe G est toujours forme intérieure d'un groupe quasi-déployé G^* .

On décrit maintenant le groupe G^* en distinguant deux cas selon la parité de m .

2.1. Supposons d'abord $m = N + 1$ impair. Alors, le groupe G est forme intérieure du groupe orthogonal *déployé* $G^* = \text{SO}(m)$ sur F associé à la forme bilinéaire symétrique attachée à

$$\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Le groupe dual (complexe) de G^* est $\widehat{G} = \text{Sp}(N, \mathbf{C})$, le groupe symplectique de la forme alternée sur \mathbf{C}^N de matrice

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} & & & & -1 \\ & & & \ddots & \\ & & 1 & & \\ & \ddots & & -1 & \\ 1 & & & & \end{pmatrix},$$

et ${}^L G = \widehat{G} \times \Gamma_F$.

2.2. Supposons maintenant $m = N$ pair. On note $\mathrm{SO}(N)$ le groupe orthogonal *déployé* sur F associé à la forme bilinéaire symétrique attachée à

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1_\ell \\ 1_\ell & 0 \end{pmatrix}.$$

Les formes *quasi-déployées* de $\mathrm{SO}(N)$ sont paramétrés par les morphismes de $\Gamma_F = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$ vers $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. D'après la théorie du corps de classes ces morphismes correspondent aux caractères η de F^*/\mathbf{A}^* tels que $\eta^2 = 1$ – caractères d'Artin d'ordre deux. Dans la suite nous notons $\mathrm{SO}(N, \eta)$ le groupe orthogonal tordu obtenu en faisant agir Γ_F sur la diagramme de Dynkin – ou la forme de $\mathrm{SO}(2)$ si $N = 2$ – *via* le caractère η . Lorsque $m = N$ est pair, il existe un caractère d'Artin d'ordre deux η tel que le groupe G soit forme intérieure du groupe *quasi-déployé* $G^* = \mathrm{SO}(N, \eta)$. Le groupe dual (complexe) de G^* est alors $\widehat{G} = \mathrm{SO}(N, \mathbf{C})$ et ${}^L G = \widehat{G} \rtimes \Gamma_F$, où Γ_F opère sur \widehat{G} par un automorphisme d'ordre 2 – trivial sur le noyau de η – et respectant un épinglage. (Pour une description explicite, voir [13, p. 79].) Notons que le caractère η est trivial à l'infini si et seulement si $(p - q)/2$ est pair. Au niveau des groupes réels cela revient à la dichotomie : si $(p - q)/2$ est impair, $\mathrm{SO}(p, q)$ est forme intérieure de $\mathrm{SO}(\ell - 1; \ell + 1)$, si $(p - q)/2$ est pair, $\mathrm{SO}(p, q)$ est forme intérieure de $\mathrm{SO}(\ell, \ell)$ (déployé sur \mathbf{R}).

2.3. Nous supposons $G_{v_0} = \mathrm{SO}(p, q)$ défini par la forme de matrice

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1_{p-q} & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & \ddots & \\ & & & \\ \hline & 1 & & \end{array} \right).$$

Une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{t} de $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p, q)$ est alors donnée par les matrices

$$(2.3.1) \quad X = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & -x_1 & & & \\ & x_1 & & & & \\ & & & \ddots & & \\ \hline & & & & \ddots & \\ & & & & & x_\ell \\ & & & & & & -x_\ell \\ & & & & & & & \ddots \end{array} \right) \quad (x_i \in \mathbf{R}).$$

Posons $y_i = \sqrt{-1}x_i$, pour $i \leq \ell - q$, et $y_i = x_i$, pour $i > \ell - q$. Les coordonnées y donnent un isomorphisme

$$\mathfrak{t}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{t} \otimes \mathbf{C} \cong \mathbf{C}^\ell$$

pour lequel les racines dans $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$ sont réelles. Le groupe de Weyl correspondant W est $\mathfrak{S}_\ell \ltimes \{\pm 1\}^\ell$, dans le premier cas, alors que dans le deuxième cas $W = \mathfrak{S}_\ell \ltimes \{\pm 1\}^{\ell-1}$, $\{\pm 1\}^{\ell-1}$ étant le sous-groupe de $\{\pm 1\}^\ell$, opérant diagonalement, défini par $\prod s_i = 1$. Notons \mathfrak{t}_s l'espace vectoriel réel engendré par les y_i . Cet espace s'identifie à une sous-algèbre de Cartan déployée de la forme réelle déployée de G_{v_0} ; il s'identifie en particulier au sous-espace correspondant pour G^* .

3. SPECTRE AUTOMORPHE DES FORMES QUASI-DÉPLOYÉES

Dans ce chapitre nous supposons G quasi-déployé, autrement dit $G = G^*$. Dans ce cas les résultats globaux d'Arthur [7, §30] s'appliquent. En particulier le théorème 30.2 donne une décomposition de la partie discrète du spectre automorphe de $G(\mathbf{A})$ selon certains paramètres globaux $\tilde{\psi} \in \tilde{\Psi}_2(G)$. En la place archimédienne v_0 un tel paramètre $\tilde{\psi}$ se localise en un paramètre local $\tilde{\psi}_{v_0}$ égal à une somme directe formelle

$$(3.0.2) \quad \tilde{\psi}_{v_0} = \psi_1 \boxplus \cdots \boxplus \psi_r,$$

où chaque ψ_j est la localisation en v_0 d'un paramètre global discret pour $\mathrm{GL}(N_j)_{|F}$ avec

$$N = N_1 + \cdots + N_r.$$

Les rangs N_j sont des entiers strictement positifs de la forme $N_j = m_j n_j$ avec $m_j, n_j \geq 1$ et chaque paramètre ψ_j est le produit tensoriel formel $\psi_j = \mu_j \boxtimes r_j$ d'une représentation irréductible μ_j de $\mathrm{GL}(m_j, \mathbf{R})$ – composante archimédienne d'une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}(m_j)$ – et de l'unique représentation irréductible r_j de dimension n_j du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$. Enfin chaque paramètre ψ_j est autodual, *i.e.* isomorphe à $\psi_j^\theta = \mu_j^\theta \boxtimes r_j$, où μ_j^θ est la représentation contragrédiente de μ_j .

3.1. Paramètres d'Arthur (généralisés). Notons $\varphi_j : W_{\mathbf{R}} \rightarrow {}^L\mathrm{GL}(m_j)$ le paramètre de Langlands associé à la représentation μ_j . On préférera voir $\tilde{\psi}_{v_0}$ comme la représentation de dimension N du groupe $W_{\mathbf{R}} \times \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ égale à $\bigoplus_j \varphi_j \otimes r_j$. Notons $\psi : \mathbf{C}^\times \times \mathrm{SL}(2, \mathbf{C}) \rightarrow \mathrm{GL}(N, \mathbf{C})$ sa restriction à $W_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^\times$. Chacun des paramètres φ_j se restreint à \mathbf{C}^\times en une représentation semi-simple donnée par m_j (quasi-)caractères χ de la forme $z^p \bar{z}^q$ avec $p - q \in \mathbf{Z}$; puisque $\tilde{\psi}$ est un paramètre réel, si χ apparaît dans φ_j alors χ^σ apparaît aussi dans ψ (mais peut-être pour un indice différent de j). Ici on a noté $\chi^\sigma(z) = \chi(\bar{z})$.

La conjecture de Ramanujan généralisée impliquerait que chacun de ces caractères est unitaire, *i.e.* $\mathrm{Re}(p + q) = 0$. À défaut, le théorème de Luo, Rudnick et Sarnak [23] – tel qu'étendu dans [13, Chapitre 7] – implique que $|\mathrm{Re}(p + q)| < 1 - \frac{2}{m_j^2 + 1}$. La condition d'auto-dualité force chaque caractère χ à apparaître avec son dual χ^{-1} . Enfin ψ se factorise à travers \hat{G} puisque $\tilde{\psi} \in \tilde{\Psi}_2(G)$.

Appelons donc *paramètre d'Arthur généralisé* toute représentation

$$\psi = \bigoplus_{j=1}^r \varphi_j \otimes r_j : \mathbf{C}^\times \times \mathrm{SL}(2, \mathbf{C}) \rightarrow \hat{G},$$

où chaque φ_j est une représentation semi-simple de \mathbf{C}^\times de rang m_j , r_j est la représentation irréductible de dimension n_j du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, $N = \sum_j n_j m_j$ et si $\chi = z^p \bar{z}^q$ est un caractère apparaissant dans un φ_j , χ^σ et χ^{-1} apparaissent aussi et :

$$p - q \in \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad |\mathrm{Re}(p + q)| < 1 - \frac{2}{m_j^2 + 1}.$$

3.2. Caractère infinitésimal. À tout paramètre d'Arthur généralisé ψ on associe un paramètre

$$\begin{aligned} \varphi_\psi : \mathbf{C}^\times &\rightarrow \widehat{G} \subset \mathrm{GL}(N, \mathbf{C}) \\ z &\mapsto \psi \left(z, \begin{pmatrix} (z\bar{z})^{1/2} & 0 \\ 0 & (z\bar{z})^{-1/2} \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Étant semi-simple, il est (à conjugaison près) d'image contenu dans le tore maximal

$$\widehat{T} = \{\mathrm{diag}(x_1, \dots, x_\ell, x_\ell^{-1}, \dots, x_1^{-1})\}$$

de \widehat{G} . On peut donc écrire

$$\varphi_\psi = (\eta_1, \dots, \eta_\ell, \eta_\ell^{-1}, \dots, \eta_1^{-1})$$

où les η_i sont des caractères, de la formes $z^{P_i} \bar{z}^{Q_i}$. On vérifie aisément que le vecteur

$$\nu_\psi = (P_1, \dots, P_\ell) \in \mathbf{C}^\ell \cong \mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$$

est uniquement défini modulo W ; on l'appelle le *caractère infinitésimal associé* à ψ . Noter que le paramètre – vu comme vecteur dans $\mathbf{C}^N = \mathbf{C}^{2\ell}$ – associé à $\varphi_\psi : \mathbf{C}^\times \rightarrow \mathrm{GL}(N, \mathbf{C})$ est $(\nu_\psi, -\nu_\psi)$. La proposition suivante découle du théorème 30.2 de [7] et de [13, Lemmes 6.3.1 & 6.4.1].

3.3. Proposition. *Soit π est une représentation automorphe de G . Alors, il existe un paramètre d'Arthur généralisé ψ tel que le caractère infinitésimal de π_{v_0} soit associé à ν_ψ .*

4. STABILISATION DE LA FORMULE DES TRACES

On voudrait comparer les spectres automorphes discrets des groupes G et G^* .

Soit donc $f = \otimes_v f_v$ une fonction lisse à support compact, décomposable, sur $G(\mathbf{A})$. On s'intéresse essentiellement à

$$(4.0.1) \quad \mathrm{trace} \, R_{\mathrm{dis}}^G(f) = \mathrm{trace} \, (f | L_{\mathrm{dis}}^2(G(F) \backslash G(\mathbf{A}))),$$

où L_{dis}^2 est la partie discrète de l'espace des formes automorphes sur $G(F) \backslash G(\mathbf{A})$. Cette trace est bien définie d'après Müller [24], mais ceci n'est pas nécessaire pour les démonstrations qui suivent. En effet, ce n'est pas l'expression (4.0.1) que l'on peut comparer à son analogue pour G^* , mais « la partie discrète de la formule des traces pour G ». Il s'agit alors de fixer un réel strictement positif t et, selon Arthur, de considérer des expressions relatives à G et G^* portant sur des représentations dont la norme du caractère infinitésimal est égale à t .

Pour t fixé, Arthur définit une distribution $f \mapsto I_{\mathrm{disc}, t}^G(f)$, somme de la partie de (4.0.1) relative à t et de termes associés à diverses représentations induites de sous-groupes de Levi [7, (21.19)]. On reviendra plus tard sur les termes complémentaires. Observons que l'on ne sait pas *a priori* montrer que la somme sur t de ces distributions converge; cela nécessiterait d'étendre le résultat de Müller mentionné plus haut.

4.1. Sous-groupes elliptiques. Considérons la famille $\mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G)$ des données endoscopiques elliptiques pour G [7, §27]. Puisque G est forme intérieure de G^* , $\mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G) = \mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G^*)$. Cet ensemble est décrit explicitement par Arthur [7, §30]. Il faut distinguer deux cas selon la parité de m .

Si $m = N + 1$ est impair $G^* = \mathrm{SO}(N + 1)$ et l'ensemble $\mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G^*)$ est paramétré par des paires d'entiers pairs (N', N'') avec $N'' \geq N' \geq 0$ et $N = N' + N''$. Le groupe endoscopique correspondant est le groupe déployé

$$(4.1.1) \quad H = \mathrm{SO}(N' + 1) \times \mathrm{SO}(N'' + 1).$$

Ainsi

$$\widehat{H} = \mathrm{Sp}\left(\frac{N'}{2}\right) \times \mathrm{Sp}\left(\frac{N''}{2}\right)$$

et ${}^L H = \widehat{H} \rtimes \Gamma_F$.

Si $m = N$ est pair $G^* = \mathrm{SO}(N, \eta)$ et l'ensemble $\mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G^*)$ est paramétré par des paires d'entiers pairs $N'' \geq N' \geq 0$ tels que $N = N' + N''$, et des paires correspondantes de caractères d'Artin η', η'' avec $\eta'\eta'' = \eta$.¹ Le groupe endoscopique correspondant est le groupe quasi-déployé

$$(4.1.2) \quad H = \mathrm{SO}(N', \eta') \times \mathrm{SO}(N'', \eta'').$$

Ainsi

$$\widehat{H} = \mathrm{SO}(N', \mathbf{C}) \times \mathrm{SO}(N'', \mathbf{C})$$

et ${}^L H = \widehat{H} \rtimes \Gamma_F$, où Γ_F opère sur chaque facteur par un automorphisme d'ordre 2, respectant un épinglage.

Dans tous les cas, on vérifie l'existence d'un morphisme naturel ${}^L H \rightarrow {}^L G$.

4.2. Lemmes fondamentaux et transfert. Les hypothèses d'analyse harmonique locale de [6, §5] – lemmes fondamentaux standard et pondéré – sont maintenant des théorèmes, voir Ngô [25] et Chaudouard-Laumon [17]. Elles permettent d'associer à f une famille de fonctions $(f^H)_{H \in \mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G)}$ (c'est une correspondance, non une application : f^H n'est définie que par ses intégrales orbitales stables). Si f est non ramifiée hors d'un ensemble fini de places $S \supset \infty$, il en est de même de f^H (si H est ramifié en une place v et f_v non ramifiée, alors f_v^H et donc f^H est nulle).

Le groupe G^* appartient à $\mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G)$. C'est le seul de dimension maximale. On notera f^* la fonction f^{G^*} .

4.3. Théorème (Arthur). On a :

$$(4.3.1) \quad I_{\mathrm{disc}, t}^G(f) = \sum_{H \in \mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G)} \iota(G, H) S_{\mathrm{disc}, t}^H(f^H)$$

où, pour tout H , $S_{\mathrm{disc}, t}^H$ est une distribution stable.

Voir [7, Cor. 29.10]. Les coefficients $\iota(G, H)$ sont définis dans [7, §27] et sont des rationnels > 0 . Noter que (4.3.1) – appliqué à G^* plutôt qu'à G , et inductivement à ses sous-groupes endoscopiques – définit, de façon unique, les distributions $S_{\mathrm{disc}, t}^H$.

5. DÉSTABILISATION DE LA FORMULE DES TRACES

Les termes de droite de (4.3.1), définis à partir du côté géométrique de la formule des traces, n'ont pas *a priori* d'interprétation spectrale. Pour utiliser cette identité, il faut donc déstabiliser son membre de droite.

1. Si $N' = 0$, $\eta' = 1$; si N' ou N'' est égal à 2, le caractère correspondant est non trivial.

5.1. Supposons pour un instant que G est un groupe (réductif, connexe) arbitraire sur un corps de nombres. Si G est *quasi-déployé*, G apparaît dans (4.3.1) comme l'un de ses sous-groupes endoscopiques et l'on a l'égalité

$$(5.1.1) \quad I_{\text{disc},t}^G(f) = S_{\text{disc},t}^G(f) + \sum_{H \in \mathcal{E}_{\text{ell}}^0(G)} \iota(G, H) S_{\text{disc},t}^H(f)$$

où la somme porte sur les groupes endoscopiques propres. Cf. [7, (29.21)], ainsi que la discussion suivant le Cor. 29.10; *ibid.* Nous pouvons appliquer (5.1.1) à chacun des groupes endoscopiques H apparaissant dans (4.3.1).

5.2. **Transfert.** Fixons un ensemble fini S de places de F , contenant les places archimédiennes, et supposons que S contient les places de ramification de G . Pour $v \notin S$, $G \times F_v$ est isomorphe au groupe quasi-déployé $G^*(F_v)$ et se déploie sur une extension non-ramifiée de F_v ; ce groupe possède donc un sous-groupe hyperspécial (voir [31, 1.10.2]) que l'on note K_v . Soit \mathcal{H}_v l'algèbre de Hecke correspondante.

On supposera que $f = f_S \otimes f^S$, où $f^S = \otimes_{v \notin S} f_v$ et $f_v \in \mathcal{H}_v$ pour tout $v \notin S$.

Si $v \notin S$, la correspondance $f_v \rightsquigarrow f_v^H$ est une application, décrite explicitement, de \mathcal{H}_v vers l'algèbre de Hecke de $(H(F_v), K_v^H)$ où K_v^H est un sous-groupe hyperspécial de $H(F_v)$, qui est non-ramifié si $f^H \neq 0$. Les groupes H ont été décrits dans le paragraphe précédents, et dépendent, puisque $\eta'' = \eta' \eta$, d'un caractère d'Artin quadratique η' . Ce caractère étant non ramifié hors S , ceci ne laisse qu'un nombre fini de possibilités pour η' et donc pour les groupes H .

En la place réelle v_0 , on dispose des résultats de Shelstad [29] sur le transfert $f_{v_0} \mapsto f_{v_0}^H$ pour les fonctions dans l'espace de Schwartz-Harish-Chandra. Il découle de [19, Appendice, Théorème A.3] que les propriétés de support compact et de K -finitude peuvent aussi être préservées. L'application de transfert n'a pas d'importance pour nous, seuls comptent son existence et le fait, que nous expliquons dans le paragraphe suivant, que *le transfert est compatible aux multiplicateurs d'Arthur*.

5.3. **Multiplicateurs d'Arthur.** Rappelons que le centre \mathbb{Z} de l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} s'identifie à $S(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})^W$. Toute représentation irréductible admissible π de G_{v_0} a un caractère infinitésimal que l'on voit comme un élément $\nu_\pi \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*/W$. L'algèbre \mathbb{Z} agit sur \mathcal{H}_{v_0} – l'algèbre des fonctions K -finies et à support compact sur G_{v_0} . Arthur montre plus généralement – voir [3, Theorem 4.2] ou encore [7, Theorem 20.4] – qu'il existe une action canonique de l'algèbre $\mathcal{E}(\mathfrak{t}_s)^W$ sur \mathcal{H}_{v_0} . Ici $\mathcal{E}(\mathfrak{t}_s)^W$ désigne l'algèbre des *multiplicateurs* – distributions W -invariantes et à support compact sur \mathfrak{t}_s munis du produit de convolution. Arthur montre en outre que pour toute représentation irréductible admissible π de G_{v_0} ,

$$(5.3.1) \quad \pi(\alpha \cdot f) = \widehat{\alpha}(\nu_\pi) \pi(f), \quad \alpha \in \mathcal{E}(\mathfrak{t}_s)^W, \quad f \in \mathcal{H}_{v_0},$$

où $\alpha \mapsto \widehat{\alpha}$ est la transformée de Fourier qui est en particulier une fonction holomorphe W -invariante sur $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$.

5.4. Revenons maintenant au transfert. Soit $\varphi_H : W_{\mathbf{R}} \rightarrow {}^L H$ un paramètre de Langlands réel pour le groupe endoscopique H et $\varphi : W_{\mathbf{R}} \rightarrow {}^L G$ le paramètre de Langlands réel obtenu en composant φ_H par le morphisme naturel ${}^L H \rightarrow {}^L G$. Notons Π_H et Π les L -paquets correspondants de représentations admissibles de H_{v_0} et de G_{v_0} .

On peut identifier le tore maximal \widehat{T}_H de \widehat{H} au tore maximal

$$\widehat{T} = \{\text{diag}(x_1, \dots, x_\ell, x_\ell^{-1}, \dots, x_1^{-1})\}$$

de \widehat{G} ($= \mathrm{Sp}(2\ell, \mathbb{C})$ ou $\mathrm{SO}(2\ell, \mathbb{C})$). On en déduit un isomorphisme entre les tores maximaux T_H et T de H et G^* . Par ailleurs G et G^* ont la même complexification, et leurs sous-algèbres de Cartan complexifiées s'identifient donc canoniquement (modulo l'action du groupe de Weyl $W = W(G^*, T)$). Cet isomorphisme permet de réaliser le groupe de Weyl $W_H := W(H, T_H)$ comme sous-groupe du groupe de Weyl W et induit un isomorphisme

$$\mathfrak{t}_{H, \mathbb{C}}^*/W_H \rightarrow \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*/W.$$

Les paramètres $(\varphi_H)_{\mathbb{C}^*} : \mathbb{C}^\times \rightarrow \widehat{H}$ et $(\varphi)_{\mathbb{C}^\times} : \mathbb{C}^\times \rightarrow \widehat{G}$ étant semi-simples, leurs images sont alors (à conjugaison près) contenues dans \widehat{T} . Il résulte de [13, Lemmes 6.3.1 & 6.4.1] que les paramètres diagonaux associés à $\varphi_H : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$ et $\varphi : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$ sont respectivement $(\nu_{\Pi_H}, -\nu_{\Pi_H})$ et $(\nu_{\Pi}, -\nu_{\Pi})$ (modulo \mathfrak{S}_N), où ν_{Π_H} et $\nu_{\Pi} \in \mathbb{C}^\ell$ sont les caractères infinitésimaux respectifs des membres des L -paquets Π_H et Π . Nous dirons que les caractères infinitésimaux ν_{Π} et ν_{Π_H} sont *associés par fonctorialité*. De la même manière on peut parler de multiplicateurs $\alpha_H \in \mathcal{E}(\mathfrak{t}_{H, s})^{W_H}$ et $\alpha \in \mathcal{E}(\mathfrak{t}_s)^W$ associés par fonctorialité; cela revient à demander que

$$\widehat{\alpha}(\nu) = \widehat{\alpha}_H(\nu_H)$$

pour tout couple (ν, ν_H) de caractères infinitésimaux associés par fonctorialité.

Dire que le transfert est compatible aux multiplicateurs d'Arthur revient alors à dire que si α et α_H sont deux multiplicateurs associés par fonctorialité alors

$$(5.4.1) \quad \mathrm{trace} \Pi_H(\alpha_H \cdot f^H) = \widehat{\alpha}(\nu_{\Pi}) \mathrm{trace} \Pi_H(f^H),$$

pour tout couple de L -paquets (Π, Π_H) se correspondant par la fonctorialité ${}^L H \rightarrow {}^L G$.

5.5. Déstabilisation. Appliquons maintenant (5.1.1) à chacun des termes de (4.3.1). Par récurrence, on voit que $S_{\mathrm{disc}, t}^H(f^H)$ s'écrit comme combinaison linéaire des termes $I_{\mathrm{disc}, t}^J(f^J)$ où les groupes J sont des groupes endoscopiques itérés des groupes H .

Soit H un groupe endoscopique associé à une partition $N = N' + N''$, voir (4.1.1) ou (4.1.2). Un groupe endoscopique pour H se décompose en produit de groupes endoscopiques pour chacun des facteurs et ceux-ci sont décrits au paragraphe précédent. Si H' est par exemple le premier facteur de (4.1.1), resp. (4.1.2), tout sous-groupe endoscopique elliptique H_1 pour H' est de la forme

$$H_1 = \mathrm{SO}(N_1 + 1) \times \mathrm{SO}(N_2 + 1), \quad \text{resp. } H_1 = \mathrm{SO}(N_1, \eta_1) \times \mathrm{SO}(N_2, \eta_2),$$

où N_1, N_2 sont pairs positifs et de somme N' et η_1, η_2 sont des caractères d'Artin d'ordre 2 avec $\eta_1 \eta_2 = \eta'$. Comme dans le paragraphe précédent, on a un morphisme naturel ${}^L H_1 \rightarrow {}^L H'$.

Après itération (finissant par des groupes $\mathrm{SO}(3)$, resp. $\mathrm{SO}(2)$, qui n'ont pas de sous-groupes endoscopiques propres), on voit que les groupes endoscopiques itérés sont, dans le premier cas, des produits de groupes $\mathrm{SO}(N_i + 1)$ et, dans le second cas, des produits de groupes $\mathrm{SO}(N_i, \eta_i)$ où les N_i sont des entiers pairs qui forment une partition de N et les η_i sont des caractères d'Artin d'ordre 2 qui vérifient $\eta_1 \cdots \eta_r = 1$. (Ce ne sont des groupes endoscopiques pour G que s'il y a deux facteurs.) Dans tous les cas, l'argument de ramification précédent reste valide : ils sont en nombre fini. Un groupe endoscopique itéré J est défini par une itération :

$$(5.5.1) \quad (G, H_1, \dots, H_r = J) = \mathcal{J}$$

et l'application $f \mapsto f^{H_1} \mapsto (f^{H_1})^{H_2} \mapsto \dots \mapsto f^J$ – en fait, une *correspondance* entre fonctions lisses – n'est pas évidemment indépendante de la suite (G, \dots, J) . On conviendra donc qu'un groupe endoscopique itéré est, non le groupe J , mais la suite \mathcal{J} de (5.5.1), et on note $f^{\mathcal{J}}$ le terme final.

Au terme de cette procédure, on obtient dans tous les cas une expression finie :

$$(5.5.2) \quad I_{\text{disc},t}^G(f) = I_{\text{disc},t}^{G^*}(f^*) + \sum_{\mathcal{J}} \eta(G, \mathcal{J}) I_{\text{disc},t}^J(f^{\mathcal{J}})$$

où les $\eta(G, \mathcal{J})$ sont des rationnels, peut-être négatifs ou nuls.

5.6. Supposons pour l'instant G (réductif connexe sur F) arbitraire. Il est temps de décrire le terme $I_{\text{disc},t}^G(f)$. Il est défini par Arthur dans [4, §4] – voir la formule (4.3) – ainsi que dans [7, (21.19)] :

$$(5.6.1) \quad \begin{aligned} I_{\text{disc},t}^G(f) &= \text{trace} \left(f | L_{\text{disc},t}^2(G(F) \backslash G(\mathbf{A})) \right) \\ &+ \sum_M \frac{|W_0^M|}{|W_0^G|} \sum_{s \in W(M)_{\text{reg}}} |\det(s-1)|^{-1} \text{trace} (M_P(s, 0) I_{P,t}(0, f)). \end{aligned}$$

Le terme correctif porte sur les sous-groupes de Levi standard, propres, de G ; l'opérateur $I_{P,t}(0, f)$ est défini par l'action de f dans une représentation de $G(\mathbf{A})$ unitairement induite à partir d'une somme finie (pour f_∞ K_∞ -finie) de représentations du spectre discret de $M(\mathbf{A})$. Les définitions des autres termes n'ont pas d'importance pour nous, cf. [4, 7]. Qu'il nous suffise de dire que $M_P(s, 0)$ est un opérateur d'entrelacement de la représentation induite. Nous appliquerons (5.6.1) à chaque terme de (5.5.2).

6. CARACTÈRES INFINITÉSIMAUX DES REPRÉSENTATIONS AUTOMORPHES DE G

Compte tenu de la convergence absolue des expressions dans (5.5.2), la compatibilité du transfert archimédien K -fini aux multiplicateurs d'Arthur (voir [8, §2.15] ou encore [21, Prop. 3.5.4]) permet de raffiner l'identité (5.5.2) en séparant les caractères infinitésimaux. Ceci fournit une identité entre traces de représentations dont les caractères infinitésimaux sont fixés et associés par fonctorialité ; les sommes apparaissant dans (5.5.2) sont alors finies. On a ainsi ramené l'étude des caractères infinitésimaux de représentations automorphes de G à l'analogue pour ses sous-groupes endoscopiques. Ceux-ci sont des produits de groupes quasi-déployés et les résultats d'Arthur [7, §30] que nous avons rappelés au chapitre 3 s'appliquent.

Fixons un groupe endoscopique itéré \mathcal{J} . Puisque J est un produit de groupes quasi-déployés, il découle du chapitre 3 que si π est une représentation automorphe de J , il existe un paramètre d'Arthur généralisé (ainsi défini dans l'introduction du chapitre 2) ψ tel que le caractère infinitésimal de π_{v_0} est égal à ν_ψ .

Le paragraphe précédent et la séparation des caractères infinitésimaux impliquent donc :

6.1. Théorème. *Si une représentation irréductible π de G_{v_0} apparaît (faiblement) dans $L^2(\Gamma \backslash G)$ pour un sous-groupe de congruence Γ , il existe un paramètre d'Arthur généralisé ψ tel que le caractère infinitésimal de π soit égal à ν_ψ .*

On peut tirer de ce théorème des conséquences similaires à celles que l'on tire de la conjecture 6.1.2 dans [13, §6.3 et 6.4]. Supposons donc $p = n$ et $q = 1$. Notons $M = \text{S}(\text{O}(n-1) \times \text{O}(1, 1)) \subset G_{v_0}$ le sous-groupe qui – dans notre réalisation de

$G_{v_0} = \mathrm{SO}(n, 1)$ – stabilise la décomposition $\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^{n-1} \oplus \mathbf{R}^2$. Sa composante neutre ${}^0M \cong \mathrm{SO}(n-1)$ est compacte. D’après la classification de Langlands, une représentation admissible irréductible π de G_{v_0} est soit un membre de la série discrète de G – auquel cas n est pair – soit un sous-quotient irréductible $J(\tau, s)$ d’une induite (non nécessairement unitaire) $I(\tau, s)$ où $\tau \in \widehat{{}^0M}$ et $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ (voir [13, §6.3 & 6.4] pour plus de détails).

6.2. Proposition. *Toute représentation unitaire π de G_{v_0} dont le caractère infinitésimal est associé à un paramètre d’Arthur généralisé appartient à la série discrète de G_{v_0} , ou est de la forme $J(\tau, s)$ avec*

- (1) $|\mathrm{Re}(s)| < \frac{1}{2} - \frac{1}{N^2+1}$, ou
- (2) $s \in \frac{n-1}{2} + \mathbf{Z}$.

Démonstration. Le caractère infinitésimal de la représentation $\pi = J(\tau, s)$ est

$$\nu_\pi = (\lambda_\tau, s) \in \mathbf{C}^\ell$$

où λ_τ – le caractère infinitésimal de τ – est une suite strictement croissante d’éléments dans $(n-1)/2 + \mathbf{Z}$. Supposons ν_π associé à un paramètre d’Arthur généralisé $\psi : \mathbf{C}^\times \times \mathrm{SL}(2, \mathbf{C}) \rightarrow \widehat{G}$. Montrons d’abord que si $s \notin \frac{1}{2}\mathbf{Z}$ alors $|\mathrm{Re}(s)| < \frac{1}{2} - \frac{1}{N^2+1}$.

Supposons en effet $s \notin \frac{1}{2}\mathbf{Z}$ et écrivons $\psi = \oplus_j \varphi_j \otimes r_j$ comme dans le chapitre 3. Puisque $\nu_\pi = \nu_\psi$ il existe un indice j , un entier k compris entre 1 et n_j (la dimension de r_j) et un caractère $\chi = z^p \bar{z}^q$ apparaissant dans φ_j tels que

$$s = p + \frac{n_j + 1 - 2k}{2}.$$

Donc $p \notin \frac{1}{2}\mathbf{Z}$. Par ailleurs la représentation $\chi \otimes r_j$ de $\mathbf{C}^\times \times \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ apparaît avec sa duale $\chi^{-1} \otimes r_j$ et puisque $p \neq 0$, $\chi \neq \chi^{-1}$. Si $n_j > 1$ le caractère infinitésimal ν_ψ contient au moins deux coordonnées $\notin \frac{1}{2}\mathbf{Z}$, contrairement à ν_π . Donc $n_j = 1$ et $s = p$.

Remarquons maintenant que χ et χ^{-1} apparaissent tous deux dans φ_j avec $|\mathrm{Re}(p+q)| < 1 - 2/(m_j^2 + 1) \leq 1 - 2/(N^2 + 1)$. Les caractères χ et χ^{-1} sont les seuls ayant un exposant $\notin \frac{1}{2}\mathbf{Z}$. Ceci force $\chi^\sigma = \chi$ ou χ^{-1} soit $\chi = (z\bar{z})^p$ ou $(z/\bar{z})^p$. Le second cas n’est pas possible puisque $p = s \notin \frac{1}{2}\mathbf{Z}$. Seule reste comme possibilité $\chi = (z\bar{z})^s$ avec $|\mathrm{Re}(s)| < \frac{1}{2} - \frac{1}{N^2+1}$.

Nous pouvons maintenant supposer que $s \in \frac{n}{2} + \mathbf{Z}$. L’argument précédent montre toujours que $n_j = 1$ et $s = p$ comme au-dessus. Supposons $|\mathrm{Re}(s)| > 1 - 2/(N^2 + 1)$. Alors l’argument précédent montre de plus que $\chi = (z/\bar{z})^p$. Vue comme représentation de $\mathbf{C}^\times \times \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, on a donc

$$\psi = \chi \oplus \chi^{-1} \oplus \sum_i \chi_i \otimes r_i,$$

où chaque $\chi_i = z^{p_i} \bar{z}^{q_i}$ avec $p_i + \frac{n_i+1}{2} \in \mathbf{Z}$. Les démonstrations [13, p. 78-80 & p. 82-83] impliquent finalement une contradiction. \square

6.3. Pour tout τ fixé et dans le cas (2) de la proposition, la longueur du paramètre $s \in (n-1)/2 + \mathbf{Z}$ est contrôlée par la description, connue, des séries complémentaires. Pour $0 \leq k \leq n-1$, notons τ_k la représentation standard de ${}^0M = \mathrm{SO}(n-1)$ sur $\wedge^k \mathbf{C}^{n-1}$. Les représentations τ_k et τ_{n-1-k} sont équivalentes, τ_k est irréductible pour $k \neq (n-1)/2$, et $\tau_{(n-1)/2} = \tau_{(n-1)/2}^+ \oplus \tau_{(n-1)/2}^-$ somme directe de deux

représentations irréductibles. Ces représentations sont les seules représentations 0M apparaissant dans $\wedge^* \mathfrak{p}_{\mathbf{C}}$, où $\mathfrak{p}_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^n$. On a plus précisément les décompositions :

$$(\wedge^k \mathbf{C}^n)_{|\mathrm{SO}(n-1)} = \begin{cases} \tau_k \oplus \tau_{k-1} & \text{si } 1 \leq k < \frac{n-1}{2}, \\ \tau_k^+ \oplus \tau_k^- \oplus \tau_{k-1} & \text{si } k = \frac{n-1}{2}, \\ \tau_k \oplus \tau_k & \text{si } k = \frac{n}{2}. \end{cases}$$

Via la formule de Matsushima les représentations $J(\tau_k^\pm, s)$ correspondent aux k -formes différentielles cofermées. On a par ailleurs

$$\begin{aligned} \lambda_{\tau_k} &= \left(\frac{n-1}{2}, \dots, \widehat{\frac{n-1}{2} - k}, \dots, \frac{n-1}{2} - \ell \right) & \text{si } k \neq \frac{n-1}{2}, \\ \lambda_{\tau_k^\pm} &= \left(\frac{n-1}{2}, \dots, 2, \pm 1 \right) & \text{si } k = \frac{n-1}{2}. \end{aligned}$$

La représentation $J(\tau_k, s)$ est unitaire si $s \in i\mathbf{R}$ ou $s \in \mathbf{R}$ et $|s| \leq (n-1)/2 - k$; pour les représentations d'Arthur – considérées dans la proposition 6.2 – on a donc $s \in i\mathbf{R}$ ou $s \in \mathbf{R}$ avec soit $|s| < 1/2 - 1/(N^2 + 1)$ soit $\pm s \in \{ \frac{n-1}{2} - \ell, \dots, \frac{n-1}{2} - k \}$.

6.4. Théorème. *Soit k un entier compris entre 0 et ℓ et soit $\Gamma \subset G$ un sous-groupe de congruence. Alors, le spectre du laplacien sur les k -formes différentielles L^2 et cofermées de $\Gamma \backslash \mathbf{H}^n$ est contenu dans l'ensemble*

$$\bigcup_{k \leq j \leq \ell} \left\{ \left(\frac{n-1}{2} - k \right)^2 - \left(\frac{n-1}{2} - j \right)^2 \right\} \cup \left[\left(\frac{n-1}{2} - k \right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N^2 + 1} \right)^2, +\infty \right[.$$

En particulier, la conjecture A^- de [13] est toujours vérifiée et pour tout $k \leq (n-4)/2$, la première valeur propre non nulle $\lambda_1^k = \lambda_1^k(\Gamma)$ vérifie :

$$\lambda_1^k \geq n - 2k - 2.$$

6.5. Revenons au cas général où $G_{v_0} = \mathrm{SO}(p, q)$. Notons θ l'involution de Cartan associée au choix de $\mathrm{S}(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q))$ comme sous-groupe compact maximal K dans G_{v_0} . Nous nous intéressons à l'isolation des représentations unitaires $\sigma \in \widehat{G}_{v_0}$ dont la $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, K)$ -cohomologie

$$H^\bullet(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, K; \sigma) = \bigoplus_k H^k(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, K; \sigma)$$

est non nulle.

Les paramètres locaux $\tilde{\psi}_{v_0} : W_{\mathbf{R}} \times \mathrm{SL}(2, \mathbf{C}) \rightarrow {}^L G$ associés aux représentations cohomologiques sont décrits par Arthur [5]. Rappelons d'abord que les représentations cohomologiques sont classifiées par Vogan et Zuckerman [33], ce sont les modules $A_{\mathfrak{q}}$ associées à des sous-algèbres paraboliques θ -stables $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. Notons L le sous-groupe de Levi correspondant à \mathfrak{l} . Alors L est défini sur \mathbf{R} . On peut identifier son groupe dual \widehat{L} au sous-groupe de Levi correspondant dans \widehat{G} . D'après Shelstad [29], l'injection $\widehat{L} \subset \widehat{G}$ s'étend en un plongement canonique $\xi_L : {}^L L \rightarrow {}^L G$ de L -groupes. Notons $\psi_L : W_{\mathbf{R}} \times \mathrm{SL}(2, \mathbf{C}) \rightarrow {}^L L$ le paramètre qui est trivial en restriction à $W_{\mathbf{R}}$ et envoie l'élément

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$$

sur l'élément unipotent principal dans \widehat{L} . Le paramètre ψ_L correspond à la représentation triviale de L et le paramètre composé $\xi_L \circ \psi_L$ est le paramètre local associé à la représentation cohomologique correspondant à la sous-algèbre parabolique \mathfrak{q} .

6.6. Théorème. Soit $\sigma = A_{\mathfrak{q}}$ une représentation cohomologique de $G_{v_0} = \mathrm{SO}(p, q)$ telle que le centre de L soit compact. Alors σ est isolée de

$$\left\{ \pi \in \widehat{G}_{v_0} : \text{il existe } \Pi \text{ représentation automorphe de } G \text{ telle que } \Pi_{v_0} \cong \pi \right\}$$

dans \widehat{G}_{v_0} – le dual unitaire – muni de sa topologie de Fell. C’est en particulier toujours le cas lorsque $\mathrm{rang}_{\mathbf{C}}(G) = \mathrm{rang}_{\mathbf{C}}(K)$, i.e. lorsque pq est pair.

Démonstration. Soit L le sous-groupe de Levi associé à une certaine sous-algèbre parabolique \mathfrak{q} . Le groupe L est donné naturellement par des matrices diagonales par blocs (cf. la description du cas unitaire dans [13, §5.2]). Il se décompose ainsi en facteurs L_i , simples ou abéliens. Il en est naturellement de même pour le groupe dual. Le paramètre ψ_L se décompose donc en une somme directe de paramètre ψ_{L_i} .

Si L_i est un facteur simple localement isomorphe à $\mathrm{SO}(n, 1)$ ou $\mathrm{SU}(n, 1)$ ($n \geq 1$) alors la représentation triviale de L_i n’est pas isolée dans le dual unitaire de L_i : si L_i est localement isomorphe à $\mathrm{SO}(1, 1)$ il suffit de considérer une suite de caractères unitaires convergeant vers le caractère trivial, sinon 1_{L_i} est limite de représentations de la série complémentaire unitaire de $\mathrm{SO}(n, 1)$ ($n \geq 2$) ou $\mathrm{SU}(n, 1)$ ($n \geq 1$). Dans tous les cas notons $\psi_i^s : \mathbf{C}^\times \times \mathrm{SL}(2, \mathbf{C}) \rightarrow {}^L L_i$ le paramètre

$$\left[\begin{pmatrix} (z/\bar{z})^s & \\ & (z/\bar{z})^{-s} \end{pmatrix} \otimes 1 \right] \oplus [1 \otimes r_{n-1}],$$

où r_{n-1} désigne la représentation irréductible de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ qui est de dimension maximale dans le groupe dual de $\mathrm{SO}(n-1)$, resp. $\mathrm{SU}(n-1)$. Lorsque $s = (n-1)/2$, dans le cas orthogonal, et $s = n/2$, dans le cas unitaire, le caractère infinitésimal de ce paramètre est celui de la représentation triviale de L_i .

Pour qu’un paramètre ψ_i^s soit un paramètre d’Arthur généralisé il est nécessaire que $|\mathrm{Re}(s)| < 1/2$. Les caractères infinitésimaux de tels paramètres ne peuvent donc s’approcher de celui de la représentation triviale que si $n = 1$, c’est-à-dire si L_i est localement isomorphe à $\mathrm{SO}(1, 1)$. Dans ce cas le centre de L n’est pas compact.

Comme remarqué dans [11, Remarque (5) p. 217], il découle de [32] que les représentations irréductibles unitaires qui s’approchent de représentations cohomologiques de G_{v_0} sont des induites cohomologiques. D’après le théorème 6.1, si une telle représentation est la composante locale d’une représentation automorphe, son caractère infinitésimal est égal à celui d’un paramètre $\bigoplus_i \psi_i^s$ comme ci-dessus. Cela force les représentations à être induites d’un sous-groupe de Levi L à centre non compact. Auquel cas la représentation cohomologique limite est elle-même associée à une sous-algèbre parabolique dont le Levi a un centre non compact. \square

RÉFÉRENCES

- [1] B. N. ALLISON – « Lie algebras of type D_4 over number fields », *Pacific J. Math.* **156** (1992), no. 2, p. 209–250.
- [2] G. W. ANDERSON – « Theta functions and holomorphic differential forms on compact quotients of bounded symmetric domains », *Duke Math. J.* **50** (1983), no. 4, p. 1137–1170.
- [3] J. ARTHUR – « A Paley-Wiener theorem for real reductive groups », *Acta Math.* **150** (1983), no. 1-2, p. 1–89.
- [4] ———, « The invariant trace formula. II. Global theory », *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), no. 3, p. 501–554.
- [5] ———, « Unipotent automorphic representations : conjectures », *Astérisque* (1989), no. 171-172, p. 13–71, Orbits unipotentes et représentations, II.

- [6] ———, « A stable trace formula. I. General expansions », *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), no. 2, p. 175–277.
- [7] ———, « An introduction to the trace formula », in *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, Clay Math. Proc., vol. 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, p. 1–263.
- [8] J. ARTHUR & L. CLOZEL – *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, Annals of Mathematics Studies, vol. 120, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.
- [9] N. BERGERON – « Cycles géodésiques transverses dans les variétés hyperboliques », *Geom. Funct. Anal.* **12** (2002), no. 3, p. 437–463.
- [10] ———, « Lefschetz properties for arithmetic real and complex hyperbolic manifolds », *Int. Math. Res. Not.* (2003), no. 20, p. 1089–1122.
- [11] ———, « Représentations cohomologiques isolées, applications cohomologiques », *J. Inst. Math. Jussieu* **7** (2008), no. 2, p. 205–246.
- [12] N. BERGERON – « Propriétés de Lefschetz automorphes pour les groupes unitaires et orthogonaux », *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* (2006), no. 106, p. vi+125.
- [13] N. BERGERON & L. CLOZEL – « Spectre automorphe des variétés hyperboliques et applications topologiques », *Astérisque* (2005), no. 303, p. xx+218.
- [14] N. BERGERON, F. HAGLUND & D. T. WISE – « Hyperplane sections in arithmetic hyperbolic manifolds », *Preprint 2008*.
- [15] A. BOREL – « Cohomologie de sous-groupes discrets et représentations de groupes semi-simples », in *Colloque “Analyse et Topologie” en l’Honneur de Henri Cartan (Orsay, 1974)*, Soc. Math. France, Paris, 1976, p. 73–112. *Astérisque*, No. 32–33.
- [16] M. BURGER, J.-S. LI & P. SARNAK – « Ramanujan duals and automorphic spectrum », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **26** (1992), no. 2, p. 253–257.
- [17] P.-H. CHAUDOUARD & G. LAUMON – « Le lemme fondamental pondéré I & II », disponible sur <http://www.math.u-psud.fr/~chaudou/>.
- [18] L. CLOZEL – « On the cuspidal cohomology of arithmetic subgroups of $SL(2n)$ and the first Betti number of arithmetic 3-manifolds », *Duke Math. J.* **55** (1987), no. 2, p. 475–486.
- [19] L. CLOZEL & P. DELORME – « Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs », *Invent. Math.* **77** (1984), no. 3, p. 427–453.
- [20] M. GROMOV & I. PIATETSKI-SHAPIRO – « Nonarithmetic groups in Lobachevsky spaces », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1988), no. 66, p. 93–103.
- [21] J.-P. LABESSE – « Cohomologie, stabilisation et changement de base », *Astérisque* (1999), no. 257, p. vi+161, Appendix A by Laurent Clozel and Labesse, and Appendix B by Lawrence Breen.
- [22] J.-S. LI – « Nonvanishing theorems for the cohomology of certain arithmetic quotients », *J. Reine Angew. Math.* **428** (1992), p. 177–217.
- [23] W. LUO, Z. RUDNICK & P. SARNAK – « On the generalized Ramanujan conjecture for $GL(n)$ », in *Automorphic forms, automorphic representations, and arithmetic (Fort Worth, TX, 1996)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 66, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, p. 301–310.
- [24] W. MÜLLER – « The trace class conjecture in the theory of automorphic forms », *Ann. of Math. (2)* **130** (1989), no. 3, p. 473–529.
- [25] B. C. NGÔ – « Le lemme fondamental pour les algèbres de lie », disponible sur <http://www.math.ias.edu/~ngo/LF.pdf>.
- [26] G. PRASAD & A. S. RAPINCHUK – « On the existence of isotropic forms of semi-simple algebraic groups over number fields with prescribed local behavior », *Adv. Math.* **207** (2006), no. 2, p. 646–660.
- [27] M. S. RAGHUNATHAN & T. N. VENKATARAMANA – « The first Betti number of arithmetic groups and the congruence subgroup problem », in *Linear algebraic groups and their representations (Los Angeles, CA, 1992)*, Contemp. Math., vol. 153, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, p. 95–107.

- [28] C. S. RAJAN – « On the non-vanishing of the first Betti number of hyperbolic three manifolds », *Math. Ann.* **330** (2004), no. 2, p. 323–329.
- [29] D. SHELSTAD – « Embeddings of L -groups », *Canad. J. Math.* **33** (1981), no. 3, p. 513–558.
- [30] B. SPEH & T. N. VENKATARAMANA – « Discrete components of some complementary series », *preprint*, *arXiv :math/0905.3140*.
- [31] J. TITS – « Reductive groups over local fields », in *Automorphic forms, representations and L -functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, p. 29–69.
- [32] D. A. VOGAN, JR. – « Isolated unitary representations », in *Automorphic forms and applications*, IAS/Park City Math. Ser., vol. 12, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, p. 379–398.
- [33] D. A. VOGAN, JR. & G. J. ZUCKERMAN – « Unitary representations with nonzero cohomology », *Compositio Math.* **53** (1984), no. 1, p. 51–90.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU, UNITÉ MIXTE DE RECHERCHE 7586 DU CNRS,
UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE, 4, PLACE JUSSIEU 75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE,

E-mail address: `bergeron@math.jussieu.fr`

URL: `http://people.math.jussieu.fr/~bergeron`

UNIVERSITÉ PARIS SUD, UNITÉ MIXTE DE RECHERCHE 8628 DU CNRS, LABORATOIRE DE
MATHÉMATIQUES, BÂT. 425, 91405 ORSAY CEDEX, FRANCE,

E-mail address: `Laurent.Clozel@math.u-psud.fr`